



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

**PERFILES
EDUCATIVOS**

ISSN 0185-2698

Balderas Cañas, Patricia E. (1996)
“LA ENSEÑANZA DEL CALCULO POR COMPUTADORA”
en Perfiles Educativos, Vol. 18 No. 72 pp. 10-14.

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO POR COMPUTADORA

Patricia E. BALDERAS CAÑAS *

En esta propuesta se señalan de manera general los contenidos, las condiciones de trabajo y la evaluación para un curso semestral de cálculo. Las actividades de los alumnos: exploración, descubrimiento y construcción de ideas matemáticas se apoyarán en el gran potencial para generar representaciones de calculadoras gráficas o software gráfico.

La propuesta forma parte de un proyecto de investigación que se propone analizar y describir las relaciones que establece el alumno de bachillerato entre diversas representaciones del concepto de derivada y el concepto de razón de cambio instantáneo de una función.



TEACHING CALCULUS WITH A COMPUTER. *In a general manner, this proposal deals with the contents, the work conditions, and the evaluation for a half-yearly course of calculus. The activities required from the students would be: exploration, discovery and construction of mathematical ideas, backed up by the enormous power of graphic calculators or graphic software for generating representations.*

This proposal is part of a research project aimed to analyse and describe the mathematical relations which the high school student establishes among diverse representations of the concepts of derivative of a function and change of rate of a function.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo diferencial e integral en el bachillerato conlleva algunos problemas de aprendizaje que tienen que ver con la interpretación y el manejo de diferentes representaciones de conceptos básicos: razón de cambio, pendiente de una curva, efecto total de un fenómeno de variación en otros.

Investigar la forma en que el alumno relaciona la pendiente de una curva y la razón de cambio instantáneo, forma parte de los problemas de investigación educativa en esta rama de las matemáticas.

Existen propuestas y estudios interesantes relativos a esta problemática, por ejemplo las de Wenzelburger (1993, 1994), Cruse y Lehman (1982), Dolan et al. (1990), Galindo y Fiske (1992), Thompson (1994). El acercamiento a los conceptos arriba señalados exige una idea en común: presentar los conceptos en la forma en que surgieron.

La mayoría de esas propuestas y estudios, incorporan la computadora o la calculadora gráfica como poderosas herramientas para la exploración, el descubrimiento y la construcción de ideas matemáticas.

Los resultados alcanzados en estudios anteriores (Balderas, 1992) han motivado la elaboración de la propuesta que se describe en este trabajo, y forma parte de un proyecto de investigación (Balderas, 1994) que pretende analizar y describir las relaciones entre diversas representaciones del concepto de derivada y el concepto de razón de cambio instantáneo que realiza el alumno de bachillerato.

* Maestría en educación matemática, UACPYP, UNAM.

Marco teórico

En la psicología del aprendizaje de matemáticas y en la resolución de problemas, así como en las relaciones entre el pensamiento y el lenguaje, Goldin y Kaput (1992) han desarrollado el concepto de representación: "...una configuración de alguna clase que (total o en parte) corresponde a, está asociada referencialmente con, quiere decir, simboliza o de otro modo representa alguna cosa" (Palmer, citado por Goldin y Kaput, idem.). La representación, en sí, no ocurre aislada, sino que usualmente pertenece a sistemas altamente estructurados en forma personal, idiosincrásica, cultural y convencionalmente. Esto se debe, inevitablemente, al acto de interpretación que se involucra en la relación entre la representación y el representado, situación que pocas veces tiene presente el profesor al utilizar ciertas o mejor dicho, la misma representación, para más de un concepto. Con ello se logra establecer una dependencia entre el modelo (la representación) y el concepto, tan rígida, que impide su uso posterior en otros niveles del conocimiento, por ejemplo, cuando las estrategias de un alumno dependen más de la representación que del concepto (como en el caso de las gráficas de funciones crecientes cuyo rango es positivo).

Al referirnos a un concepto matemático en sus diversas representaciones podemos abstraerlo mediante el conocimiento de las propiedades comunes en ellas, despreciando lo irrelevante, que es lo que se manifiesta en las representaciones específicas. Además, el uso del concepto se mejora con su aparición bajo distintas representaciones, niveles y notaciones en las ramas matemáticas, en otras disciplinas o en la vida diaria (Even, 1990).

Investigadores como Kaput, Goldin, Von Glaserfeld, Janvier, Vergnaud, etc. han procurado hacer más preciso el término representación, para lo cual es indispensable distinguir entre el signo (significante, referente) y la idea -el concepto- (significado, referido).

Así, para la psicología del aprendizaje y para el quehacer matemático es importante dejar bien clara la diferencia entre los sistemas de representación interna y externa (figura 1), que se caracteriza como la distinción entre el significado (interno) y el significante (externo).

REPRESENTACIONES MENTALES INTERNAS



INTERACCIONES



REPRESENTACIONES FÍSICAS EXTERNAS

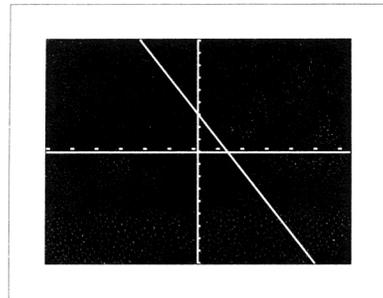
Figura 1

Algunas veces se habla de una configuración que representa a otra; la referencia se hace a las dos configuraciones externas (una relación horizontal, si imaginamos la externa a un nivel y la interna en el otro nivel).

De acuerdo con la figura 2 decimos, por ejemplo, que la configuración externa -en este caso una gráfica- (A), representa la (externa) expresión simbólica $f(x) = -4x + 5$ (B) o que ésta representa la (interna, físicamente sumergida) relación entre la posición y el tiempo de un objeto en movimiento (B).

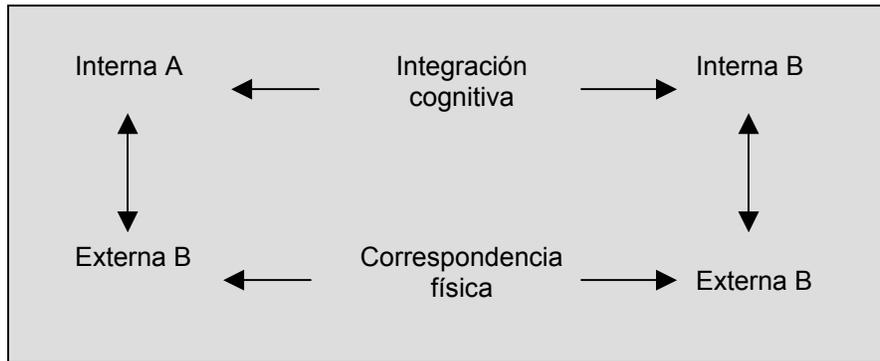
Lo anterior pone de relieve la correspondencia entre una configuración interna y una externa, que corresponde a la dimensión vertical de la representación.

En el ejemplo se muestra cómo, dada la configuración (externa) $f(x) = -4x + 5$, un estudiante es capaz o no de visualizarla (internamente) como una línea recta. Una de las dos configuraciones internas puede representar la otra (nivel horizontal), como en el caso del estudiante que relaciona mentalmente su imagen (interna) de una línea recta con su codificación simbólica (interna) $f(x) = mx + b$, en donde m representa la pendiente de la recta y b su intersección con el eje Y .



$f(x) = -4x + 5$
Configuración externa (B)

Configuración externa (A)



La distinción entre los sistemas de representación internos y externos es, asimismo, un modelo construido y desarrollado por un observador o una comunidad de teóricos para ayudarse a explicar la conducta de los individuos observados (población). En un sentido es consistente con la experiencia descrita de los seres humanos, con relación a un interior y un exterior de las experiencias mentales internas, pensamientos, sentimientos, distintos de un modo real o físico.

Goldin y Kaput coinciden en que tanto las experiencias mentales como los pensamientos y los sentimientos se construyen de la experiencia individual, y que cada individuo construye (nivel interno) las relaciones entre esos constructos. Sin embargo, los sistemas internos o externos no pretenden explicar, describir o ser el mundo de la experiencia de una persona, sólo intentan explicar y organizar las observaciones de la conducta individual.

En este sentido, se propone el uso de un graficador o una calculadora gráfica por su valiosa capacidad para manejar diferentes representaciones de un concepto, situación que favorece la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas, además de la construcción de conceptos como resultado de las actividades del alumno, organizadas y diseñadas de acuerdo con el recurso computacional particular de que se trate.

Ciertos materiales, desarrollados para el estudio de los procesos cognoscitivos en el aprendizaje de algunos conceptos de cálculo, mediante representaciones en calculadoras gráficas (Balderas, 1993), se valen de representaciones gráficas -en el plano cartesiano- para la secante y el trazo progresivo de secantes más próximas a la posición de la tangente, a fin de sugerirle al alumno que la dirección de una curva, en un punto de su gráfica, la proporciona la tangente trazada en dicho punto. Y, simultáneamente, concluya que la

derivada, valuada en la abscisa del punto de tangencia, se obtiene como el valor límite de las pendientes de las secantes conforme estas se aproximan a la tangente.

La enseñanza de estos conceptos de cálculo concebida como coordinación de las actividades de exploración de los alumnos con una herramienta (graficador o calculadora gráfica) permite, por ejemplo, introducir el concepto de derivada de manera más objetiva, relacionándola con la pendiente de la recta tangente y con el concepto de razón de cambio. En este caso se puede simular una situación dinámica que enfatice el hecho de que la derivada es la razón de cambio instantáneo de la función, con lo cual el alumno capta tanto el proceso como el concepto mismo.

Por otra parte, paralelamente a la problemática de la enseñanza del cálculo se da la de su aprendizaje y, dentro de éste, el alumno se enfrenta ante lo siguiente:

1. La relación entre dos magnitudes que se asocian por pares.
2. El tener presente dicha relación para trazar una gráfica en el supuesto de una continuidad.
3. Concebir a la derivada como una función que provee información acerca de la función que se deriva (Wenzelburger, 1993).

Es necesario, por tanto, dotarlo de un ambiente que le ayude a resolver sus problemas de aprendizaje.

Propuesta

El curso formulado tiene una duración de un semestre y está dirigido a los alumnos del último año de bachillerato que estudian en las áreas físico-matemáticas, químico-biológicas y económico-administrativas. El tiempo requerido para cada sesión es de dos horas, y se sugiere tengan por lo menos dos sesiones semanales durante el semestre.

El área de trabajo debe permitir el libre movimiento de los educandos, quienes dispondrán de mesas de trabajo para equipos de cuatro o cinco integrantes, calculadoras gráficas, computadora y software gráfico (Mathcad, Derive, Calcula, Cactus-plot, etcétera).

Deberá disponerse, también de retroproyector, pantalla, pizarrón acrílico, muebles para guardar materiales (láminas, modelos, acetatos, disquettes, etcétera).

Los estudios previos de matemáticas de los estudiantes son:

1. Curso de álgebra (con énfasis en variables y funciones)
2. curso de álgebra de funciones elementales, y
3. curso de geometría analítica (representaciones cartesianas de relaciones y funciones).

Los contenidos del curso están agrupados en cuatro temáticas básicas:

- I. Fenómenos dinámicos (situaciones problemáticas de variación).
- II. Razones de cambio y efectos de las razones de cambio (uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas).
- III. Derivada e integral como procesos límite)
- IV. Generalización de los conceptos de derivada e integral.

La clasificación obedece más a fines inductivos de la instrucción que a razones temporales en la planeación de las actividades. Éstas se describen de manera general para cada unidad, de la siguiente forma:

I. El trabajo del grupo en la primera unidad consistirá principalmente de las siguientes fases: observación, análisis y exploración libre de situaciones que tengan que ver con fenómenos de variación. Las cuestiones que se elijan las deberá valorar el profesor, quien conducirá a los alumnos en caso de dificultad, para escoger un problema que esté de acuerdo a la idiosincracia, antecedentes e intereses de los educandos. Algunos ejemplos conocidos son los problemas de resortes, volúmenes, distancias recorridas, crecimiento de una población etcétera.

II. En la segunda unidad los alumnos generarán registros tabulares y gráficos de razones de cambio de los fenómenos escogidos; comparación y reconocimiento de los modelos algebraicos conocidos; elaboración de representaciones tabulares y gráficas para los efectos de las razones de cambio.

III. Construcción de gráficos para razones de cambio instantáneo y aproximación al modelo $f'(x)$. Construcción de la gráfica de los efectos de las razones de cambio instantáneo y aproximación al modelo.

IV. La generalización de los conceptos abarcará criterios para determinar funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión concavidad de la curva, centro de gravedad, trabajo y valor promedio de una función. El tratamiento de los temas será por medio de resolución de problemas cuidando que el alumno se responsabilice de su aprendizaje. Respecto de la evaluación del aprendizaje se recomienda valerse de reportes de los alumnos (Martínez, 1994) de las sesiones de clase, tareas, entrevistas individuales, cuestionarios breves (que planteen cuestiones para reflexionar y reducir así las tendencias tradicionales que sólo evalúan aspectos rutinarios)

Ejemplo

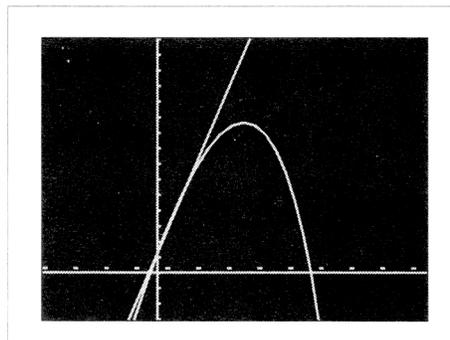
En una reacción química la cantidad en gramos Y de la sustancia producida después de cierto tiempo X (horas), se obtiene de la expresión:

$$Y=16X-4X^2 \text{ cuando } 0 \leq X \leq 2$$

Cuestiones:

- Estima la velocidad en gramos por hora, con ayuda del programa DERIVADA,* a la cual se empieza a producir la sustancia cuando han transcurrido los siguientes tiempos:
(a) $X = 0.5$ (b) $X = 1$ (c) $X = 2$
- Explica, dentro del contexto del problema, la respuesta al inciso c.

El alumno utiliza, para contestar las cuestiones anteriores, representaciones del tipo:



$X+H=$	7
$F(X+H)=$.51
$M=$	7.1196
	11.96

Comentarios finales

Los cursos tradicionales de cálculo en el bachillerato abordan las mismas temáticas básicas: funciones, límites, derivada e integral. Pero la presentación inicial se da a nivel formal, es decir, se dan a conocer los conceptos en forma acabada y los resultados de los procesos quedando, de esta forma, oculto -para el alumno- el proceso de construcción de dichos conceptos.

Las consecuencias de la evaluación varían de acuerdo al enfoque de la instrucción que se instrumente en el aula, de ahí que la metodología propuesta tenga implicaciones en la forma de evaluación, hasta el punto de que el profesor no sólo evaluará la información que posee el educando, sino la comunicación de ideas (Martínez, op. cit.) en cuanto a la organización, síntesis, reflexión y conclusión que pudieran llevar al alumno a la demostración del conocimiento adquirido.

Cuando el alumno resuelve problemas (situaciones problemáticas para él), como parte de las actividades del curso propuesto, se enfrentará a la necesidad de organizar sus ideas, reflexionar y llegar continuamente a conclusiones y, con ello, el profesor tiene la oportunidad de valorar su aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

BALDERAS, Patricia

1992. *Adquisición de conceptos de cálculo con apoyo de la graficación en microcomputadora*. Tesis maestría. México, UACPYP-CCH UNAM.

1993. "Exploración gráfica para la construcción del concepto de derivada en el nivel medio superior", en: A. Carlón (ed), *Memorias del IV Simposio Internacional en Educación Matemática*. México, UACPYP-CCH UNAM, 18-20 de octubre.

1994. *La representación y el razonamiento visual en la enseñanza de la matemática*. Proyecto de investigación aprobado en el Programa de Doctorado en Pedagogía. UNAM-Facultad de Filosofía y Letras.

CRUSE, Allan y Milianne LEHMAN

1982. *Lecciones de cálculo 1 introducción a la derivada*, México, Fondo Educativo Interamericano.

DOLAN, Stan et. al.

1990. *Introductory Calculus*. Great Britain, The School Mathematics Project, Cambridge University Press.

EVEN, Ruhama

1990. "Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions", en *Educational Series in Mathematics*, 6 (21).

GALINDO, Enrique y Michael FISKE

1992. *Visualización en la enseñanza del cálculo*. Curso corto en la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. México, Cuernavaca, Mor.

GERALD, A. & J. KAPUT

1992. *A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics*. Notes for a rough draft.

MARTÍNEZ, Armando

1994. *El uso de reportes escritos en matemáticas remediales para ingeniería. Una experiencia mexicana*. Ponencia enviada a la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa, Costa Rica.

THOMPSON, Patrick

1994. "Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus", en: *Educational Studies in Mathematics* (26): 229-274.

WENZELBURGER, Elfriede

1993. *Didáctica cálculo diferencial*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.